CONCOURS COMMUN CENTRALE-SUPELEC 1983

**TA**

**MATHEMATIQUES I**
(2 pages dactylographiées)

N.B. La partie II est indépendante de la partie I, à condition d'admettre le résultat de la question I.4/b.
La partie III est indépendante des parties I et II.

---

QUESTION PRELIMINAIRE

Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente.

L'objet du problème est de trouver de deux façons la valeur numérique de la somme de cette série, somme qui sera notée S.

On pose :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2x} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), & \text{pour } -1 < x < +1,\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} f(u,v) = \frac{\sin u}{1-\cos u \cos v} & \text{pour } 0 \leqslant u \leqslant \pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2},\ (u,v) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

(Log u désigne le logarithme népérien de u, si u > 0).

Partie I

1°) Montrer que la fonction f, définie par (1), est continue en tout point de son intervalle de définition. Etudier la fonction f et la représenter graphiquement.

2°) Développer la fonction f, définie par (1), en série entière au voisinage de l'origine. Préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

3°) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ est convergente.

4°) a. Démontrer que l'intégrale $I_p = \int_0^1 x^{p-1} \log(1-x)\,dx$ existe pour tout $p \in \mathbb{N}$, et qu'elle tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$ (on pourra diviser l'intervalle [0,1] en deux sous intervalles).

b. En déduire que $\int_0^1 f(x)\,dx = S$. On pourra, à cet effet, établir pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{p=N}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p+1} \leqslant x^{2N} f(x), \text{ pour } 0 \leqslant x < 1,$$

et en déduire: $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^2} \leqslant \int_0^1 x^{2N} f(x)\,dx.$

c. Pour $-1 < x < 1$, vérifier $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

(Un résultat hors programme permettrait d'en déduire $\int_0^1 f(t)\,dt = S$).

.../...

Partie II

1°) La fonction F définie par (2) est-elle continue en tout point du rectangle $[0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ?

2°) Pour $v \in ]0, \frac{\pi}{2}]$ donné, calculer l'intégrale : $h(v) = \int_0^{\pi} F(u,v)\, du$

Vérifier que $h(v) = 2 f(\cos v)$.

3°) On considère le réel $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour $u \in [0, \pi]$ donné, calculer l'intégrale : $g_\varepsilon(u) = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} F(u,v)\, dv$

4°) Pour tout $\varepsilon \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, justifier l'égalité :

$$(3) \qquad \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} h(v)dv = \int_0^{\pi} g_\varepsilon(u)\, du$$

et en déduire l'égalité :

$$(4) \qquad \int_0^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2})} f(x)\, dx = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} I(\varepsilon), \text{ où } I(\varepsilon) = \int_0^{\pi} \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\right) du$$

(au premier membre de (3) il sera commode d'effectuer le changement de variable $x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{v}{2})$ ).

5°) Calculer $\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon)$, (il sera commode de diviser l'intervalle $[0,\pi]$ en deux sous intervalles $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ et $[\sqrt{\varepsilon}, \pi]$ et d'utiliser deux majorations différentes de la fonction sous le signe $\int$ ).

6°) Déduire de cette étude la valeur numérique de S.

Partie III

On considère la restriction à $[-\pi, \pi]$ de la fonction $x \mapsto |x|$. On admettra que (d'après un théorème de convergence classique sur les séries trigonométriques) l'on puisse écrire :

$$(5) \qquad \begin{cases} |x| = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ -\pi \leqslant x \leqslant +\pi \end{cases}$$

où les coefficients $a_n$ $(n \geqslant 0)$ et $b_n$ $(n \geqslant 1)$, sont définis par les intégrales :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x|\, dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x| \cos nx\, dx \qquad (n \geqslant 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |x| \sin nx\, dx \qquad (n \geqslant 1)$$

Calculer les coefficients $a_0$, $a_n$ et $b_n$ $(n \geqslant 1)$.

Retrouver à partir de ce résultat la valeur numérique de la somme S.

FIN

* * * *